

УДК 532.5.031

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ СФЕРОИДАЛЬНЫХ КАВИТАЦИОННЫХ  
ПУЗЫРЬКОВ ВБЛИЗИ ЖЕСТКОЙ СТЕНКИ<sup>1)</sup>****Л.А. КОСОЛАПОВА, В.Г. МАЛАХОВ***Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, г. Казань**E-mail: kosolapova@kfti.knc.ru; malahov@kfti.knc.ru***NUMERICAL INVESTIGATION DYNAMICS OF THE SPHEROIDAL CAVITATION BUBBLE NEAR A  
RIGID WALL****L.A. KOSOLAPOVA, V.G. MALAKHOV***Institute of Mechanics and Engineering KazSC RAS, Kazan***Аннотация**

При схлопывании кавитационных пузырьков вблизи твердой стенки возможно их разделение на пузырьки меньших размеров. Для исследования осесимметричной динамики системы таких пузырьков, расположенных вдоль оси вращения, в настоящей работе построен алгоритм, основанный на схеме Эйлера и методе граничных элементов. Жидкость, окружающая пузырьки, невязкая несжимаемая, ее течение потенциальное. Приводятся результаты тестирования и примеры расчетов схлопывания кавитационных сфероидальных пузырьков у стенки.

**Ключевые слова:** Кавитационный пузырек, потенциальное течение жидкости, метод граничных элементов.

**Summary**

Cavitation bubbles collapsing near a rigid wall may divide into bubbles of smaller size. An algorithm for studying dynamics of a system of such bubbles distributed along the axis of revolution has been developed and is presented in the present paper. It is based on the Euler scheme and the boundary element method. The liquid surrounding the bubbles is incompressible, its flow being potential. Some results testing and examples of computing the collapse of spherical cavitation bubbles near a wall are given.

**Key words:** Cavitation bubble, cumulative jet, potential flow fluid, boundary element method..

**Введение**

Для исследования динамики пузырька в идеальной несжимаемой жидкости широко используется подход, основанный на методе граничных элементов (МГЭ). Впервые такая методика была разработана в [1] и на ее основе в [2, 3] изучено захлопывание кавитационного пузырька у твердой стенки в зависимости от его начальной формы, которая задавалась в виде сплюснутого эллипсоида. Установлена сильная зависимость диаметра и скорости кумулятивной струи от начальной формы пузырька. Следующий шаг в использовании такой методики был сделан только через десять лет в работах [4, 5] и др. Один из последних обзоров применений подхода, основанного на МГЭ, можно найти в [6]. В настоящей работе аналогичная методика, использующая метод Эйлера для отслеживания движения поверхности пузырька и коррекции потенциала скорости жидкости на нем и МГЭ, разработана для изучения динамики системы газовых пузырьков, находящихся в идеальной несжимаемой жидкости, вблизи твердой стенки. Разработан и реализован алгоритм построения полей давления и скорости окружающей пузырьки жидкости.

<sup>1)</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (Грант РФФИ 14-01-97004 р\_поволжье\_a)

## 1. Постановка задачи

Рассматривается осесимметричная система из  $N$  кавитационных пузырьков вблизи твердой стенки, перпендикулярной оси симметрии. В начальный момент времени  $t_0$  определены формы поверхности пузырьков и значения потенциала скорости жидкости  $\Phi$  на поверхности каждого из них. Требуется найти эволюцию пузырьков при  $t > t_0$ .

Потенциальное движение идеальной несжимаемой жидкости описывается уравнениями

$$\Delta\Phi = 0, \quad \Phi_t + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + \frac{p - p_\infty}{\rho_f} = 0, \quad (1)$$

где  $\Phi$  – потенциал скорости,  $t$  – время,  $p, p_\infty$  – давление в жидкости и "на бесконечности",  $\rho_f$  – плотность жидкости. Состояние пара в кавитационном пузырьке описывается уравнением Ван-дер-Ваальса

$$p^- = p_b^0 \left[ (1 + \bar{a}) \left( \frac{1 - \bar{b}}{V/V_0 - \bar{b}} \right)^\gamma - \bar{a} \left( \frac{V_0}{V} \right)^2 \right]. \quad (2)$$

Здесь  $\bar{a} = a/(V_0^2 p_b^0)$ ,  $\bar{b} = b/V_0$ ,  $V_0, V$  – начальный и текущий объемы пузырька,  $\gamma$  – показатель адиабаты,  $a, b$  – константы газа.

На поверхности пузырьков выполняются динамическое и кинематическое условия

$$p^+ = p^- - 2\sigma H, \quad d\mathbf{x}/dt = \mathbf{v}, \quad (3)$$

где  $p^+, p^-$  – давления со стороны жидкости и пара,  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения,  $H$  – средняя кривизна,  $\mathbf{x}, \mathbf{v}$  – радиус-вектор и скорость точки поверхности ( $\mathbf{v} = \nabla\Phi$ ).

На жесткой стенке ставится условие непротекания

$$v_z = 0. \quad (4)$$

Потенциал скорости  $\Phi$  и его нормальная производная  $\partial\Phi/\partial n$  на поверхности пузырьков  $Sk$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , связаны граничным интегральным уравнением (ГИУ), которое для осесимметричного случая в цилиндрической системе координат имеет вид [7]

$$c(\rho, z)\Phi(\rho, z) = \sum_{k=1}^N \int_{S_k} \{ \psi(\rho_0, z_0) K_1(\rho_0, z_0, \rho, z, t) - \Phi(\rho_0, z_0) K_2(\rho_0, z_0, \rho, z, t) \} ds_0 \quad (5)$$

где

$$\psi(\rho_0, z_0) = \partial\Phi(\rho_0, z_0)/\partial n_0, \quad K_1(\rho_0, z_0, \rho, z, t) = \frac{\rho_0}{\pi} \left( \frac{K(m)}{A} + \frac{K(m_2)}{A_2} \right),$$

$$K_2(\rho_0, z_0, \rho, z, t) = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{E(m) - K(m)}{A} + \frac{E(m_2) - K(m_2)}{A_2} \right) \frac{dz_0}{ds_0} + \right.$$

$$\left. + \frac{\rho_0}{d^2} \left( (\rho - \rho_0) \frac{dz_0}{ds_0} - (z - z_0) \frac{d\rho_0}{ds_0} \right) \frac{E(m)}{A} + \frac{\rho_0}{d_2^2} \left( (\rho - \rho_0) \frac{dz_0}{ds_0} + (z + z_0) \frac{d\rho_0}{ds_0} \right) \frac{E(m_2)}{A_2} \right],$$

$$A^2 = (\rho + \rho_0)^2 + (z - z_0)^2, \quad A_2^2 = (\rho + \rho_0)^2 + (z + z_0)^2,$$

$$d^2 = (\rho - \rho_0)^2 + (z - z_0)^2, \quad d_2^2 = (\rho - \rho_0)^2 + (z + z_0)^2, \quad m^2 = 4\rho\rho_0/A^2, \quad m_2^2 = 4\rho\rho_0/A_2^2,$$

$(\rho, \varphi, z), (\rho_0, \varphi, z_0)$  – координаты точек наблюдения и интегрирования,  $s_0$  – дуговая координата контура образующей поверхности пузырька,  $K(m), E(m)$  – полные эллиптические интегралы 1 и 2 рода, коэффициент  $c(\rho, z)$  можно принять равным 0.5 при условии гладкости поверхностей пузырьков.

## 2. Метод решения.

Алгоритм решения задачи (1)–(4) аналогичен алгоритму для одного пузырька, описанному в [7]. Пусть в момент  $t^{(m)}$  известна геометрия поверхности каждого пузырька и распределение потенциала  $\Phi^{(m)}$  на ней.

1. С использованием МГЭ решается ГИУ (5) и определяются значения  $\partial\Phi/\partial n$  на контурах в момент  $t^{(m)}$ . При этом применяются линейные граничные элементы с линейными интерполирующими функциями  $\psi(\rho_0, z_0)$ ,  $\Phi(\rho_0, z_0)$  в пределах одного элемента. При реализации МГЭ интегралы, содержащие логарифмические особенности, вычислялись по специальной формуле [8], интегралы без особенностей – по формуле Гаусса 8-го порядка точности.

2. По значениям потенциала на контурах вычисляется производная  $\partial\Phi/\partial s$ , тем самым определяется скорость жидкости  $\nabla\Phi = (\partial\Phi/\partial s, \partial\Phi/\partial n)$  в точках контуров.

3. Вычисляются радиальная  $v_\rho$  и осевая  $v_z$  составляющие скорости через  $\partial\Phi/\partial s$ ,  $\partial\Phi/\partial n$  с учетом выражений для компонентов нормали  $n_\rho = z_s$ ,  $n_z = -\rho_s$

$$v_\rho = \frac{\partial\Phi}{\partial\rho} = \frac{\partial\Phi}{\partial s}\rho_s + \frac{\partial\Phi}{\partial n}z_s, \quad v_z = \frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{\partial\Phi}{\partial s}z_s - \frac{\partial\Phi}{\partial n}\rho_s.$$

4. Определяется положение точек контуров в момент  $t^{(m+1)} = t^{(m)} + \tau^{(m)}$  по формулам

$$\rho^{(m+1)} = \rho^{(m)} + \tau^{(m)}\partial\Phi^{(m)}/\partial\rho, \quad z^{(m+1)} = z^{(m)} + \tau^{(m)}\partial\Phi^{(m)}/\partial z.$$

5. Вычисляются новые объемы пузырьков и находится текущее давление в них по формуле (2).

6. Определяются значения потенциала на новых контурах при  $t^{(m+1)} = t^{(m)} + \tau^{(m)}$

$$\Phi^{(m+1)} \approx \Phi^{(m)} + \frac{D\Phi}{Dt}\tau^{(m)} = \Phi^{(m)} + \tau^{(m)} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial t} + (\nabla\Phi)^2 \right)^{(m)}.$$

Производная  $\partial\Phi/\partial t$  находится с использованием интеграла Коши-Лагранжа (1) на поверхности пузырьков в момент  $t^{(m)}$  с учетом динамического условия (3) и адиабатического закона изменения давления (2).

Устойчивость алгоритма обеспечивается условием [9]

$$\tau^{(m)} = a\sqrt{\frac{p_\infty}{\rho_0}} \frac{C}{\max_s |D\Phi/Dt|}, \quad m = 0, 1, \dots, \quad (6)$$

где  $a$  – характерный линейный размер пузырьков,  $C$  – безразмерный параметр, определяемый численным экспериментом, обычно  $0.001 < C < 0.02$ .

Определив положение контуров и распределение потенциала на них, переходим к п.1.

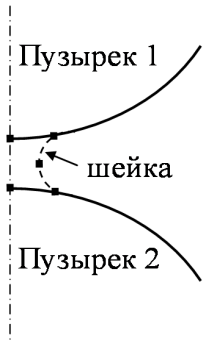


Рис.1

Применение описанного алгоритма предполагает существование реального процесса, в результате которого возникает система пузырьков с формой контуров  $\rho^{(0)}$ ,  $z^{(0)}$  и потенциала на них  $\Phi^{(0)}$ . Такой процесс, в котором могут возникнуть два пузырька, реализуется, например, при сжатии сплюснутого сфероидального пузырька с отношением полуосей  $e = b/a < 0.8$  ( $a$  – полуось, перпендикулярная оси вращения). В процессе сжатия образуется тонкая шейка (рис.1). В окрестности этой шейки производится искусственное разделение пузырька на два введением разрыва контура и замыканием возникших концов на ось вращения перпендикулярно этой оси. Значение потенциала в области разрыва переносится на вновь образованные точки контуров. Таким образом, при реализации процесса сжатия пузырька предполагается использование на первом этапе аналогичного алгоритма для одного пузырька, введение разрыва в области шейки и определение значения потенциала на обоих

контурах, после чего используется описанный выше алгоритм для  $N=2$ .

Для полноты физической картины был разработан алгоритм построения полей давления и скорости окружающей пузырек жидкости. При их построении потенциал  $\Phi(\rho, z)$  определялся из уравнения (5), в котором полагалось  $c=1$ . Для вычисления компонент скорости  $v_\rho = \partial\Phi/\partial\rho$  и  $v_z = \partial\Phi/\partial z$  использовались конечно-разностные формулы второго порядка точности. Давление в жидкости вычислялось из уравнения (1), где  $\partial\Phi/\partial t$  также подсчитывалось по конечно-разностным формулам.

Алгоритм тестирован на задаче о схлопывании сферического пузырька, контактирующего со стенкой, когда в процессе схлопывания возникает кумулятивная струя. В табл.1 приведена скорость конца струи в

момент  $t_1$ , когда струя касается противоположной стенки пузырька, полученная при различных значениях параметра  $C$ . Из таблицы видно, что сходимость к решению имеет первый порядок точности, характерный для применяемой схемы Эйлера. Отметим, что значение скорости в момент  $t_1$ , полученное в настоящей работе, отличается от работы [2] (119 м/с) на 1 %.

Таблица 1

$C$	0.02	0.01	0.005	0.0025
$t_1$ , мкс	108.84	109.74	109.40	108.47
$v(s_0)$ , м/с	137.60	123.40	121.20	120.70

Для тестирования МГЭ была взята функция

$$\Phi = \sum_{i=1}^2 \left\{ [\rho^2 + (z - z_i)^2]^{-1/2} + [\rho^2 + (z + z_i)^2]^{-1/2} \right\}, \quad (7)$$

гармоническая вне областей, расположенных в полуплоскости  $z \geq 0$  и содержащих точки  $(0, z_1)$  и  $(0, z_2)$ . В качестве таких областей рассматривались два сфероида с центрами на оси симметрии. На контурах сфероидов по формуле (7) вычислялись значения функции  $\Phi$ , и затем, по известным значениям  $\Phi$ , МГЭ определялась нормальная производная на этих контурах. Значения производной  $\Phi$ , полученной МГЭ, сравнивались с вычисленными с использованием формулы (7). Результаты показали, что имеет место сходимость второго порядка точности: при удвоении числа узлов погрешность в определении  $\partial\Phi/\partial n$  на контурах пузырьков уменьшалась примерно в 4 раза.

### 3. Схлопывание сфероидального кавитационного пузырька в воде у жесткой стенки

Исследована динамика парового сплюснутого сфероидального пузырька в воде в зависимости от его расстояния до стенки. Задача решалась в два этапа. На первом этапе проводился расчет одного пузырька при следующих исходных данных:  $R_0 = 1$  мм,  $e = 0.67$ ,  $h_0/R_0 = 0, 2$ ,  $p_\infty = 0.1$  МПа,  $\rho_f = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $\sigma = 0$ ,  $p_b^0 = 0.0023$  МПа,  $\gamma = 1.33$ ,  $\bar{a} = 8.4 \cdot 10^{-5}$ ,  $\bar{b} = 1.8 \cdot 10^{-5}$ ,  $n = 200$ .

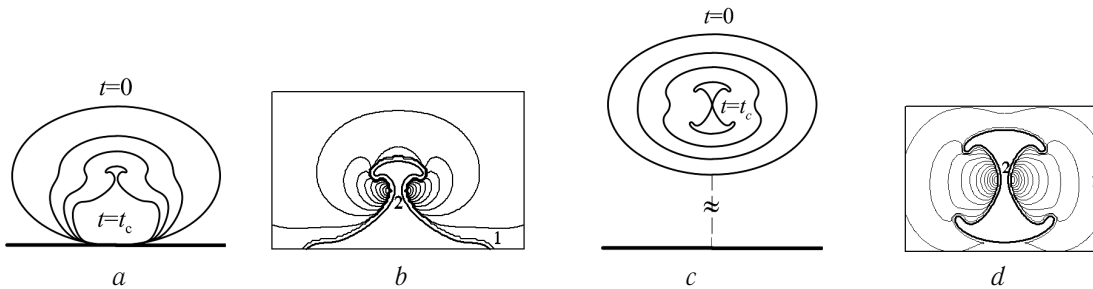


Рис. 2: Формы пузырька для четырех моментов времени и поля давления жидкости в момент образования тонкой шейки (момент  $t_c$ ):  $a, b$  – для пузырька у стенки, уровень 1 –  $p = 0.8$  бар, уровень 2 – 32.9 бар;  $c, d$  – на расстоянии  $2R_0$  от стенки, уровень 1 –  $p = 21.4$  бар, уровень 2 – 100.4 бар

Результаты расчетов изображены на рис.2, где представлены формы пузырька в 4 последовательных момента времени, последний из которых соответствует моменту  $t_c$  образования тонкой шейки на поверхности пузырька и поля давления окружающей пузырек жидкости в момент  $t_c$ :  $a, b$  – для пузырька, примыкающего к стенке,  $c, d$  – для пузырька, находящегося от стенки на расстоянии  $2R_0$ . Видно, что у пузырька у стенки шейка образуется в его верхней части, что приводит к образованию дочернего пузырька, в окрестности которого возникает максимальное давление жидкости.

Влияние стенки на пузырек, удаленный от нее на расстояние  $2R_0$ , уменьшается и тонкая шейка как бы разделяет пузырек на два примерно одинаковых. Максимальное давление жидкости, как и в предыдущем случае, наблюдается в области шейки.

На втором этапе расчетов пузырек разбивался на два по методике, описанной выше. При этом исходными данными служили форма пузырька и потенциал на его поверхности в момент  $t_c$ . На рис.3  $a, c$

представлены формы двух пузырьков в момент, когда в меньшем (верхнем) пузырьке кумулятивная струя достигла его противоположной стенки. Видно, что в нижних пузырьках, как и в верхних, возникает кумулятивная струя, но в силу их больших размеров она не успевает достичь противоположной стенки пузырьков. Картина давления жидкости в окрестности пузырьков изображена на рис.3 *b, d*. Наибольшая концентрация давления наблюдается в вершинах струй.

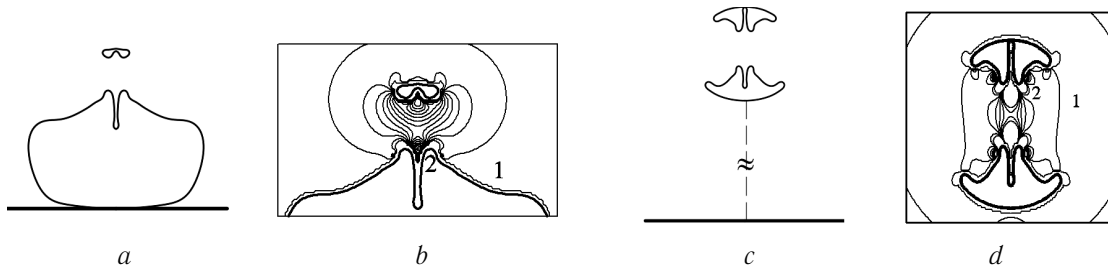


Рис. 3: Формы пузырьков и поля давления жидкости в момент достижения кумулятивной струей противоположной стенки меньшего пузырька: *a, b* — для пузырька у стенки, уровень 1 —  $p = 0.9$  бар, уровень 2 — 203.4 бар ; *c, d* — на расстоянии  $2R_0$  от стенки, уровень 1 —  $p = 27$  бар, уровень 2 — 2146.7 бар

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Воинов О.В., Воинов В.В.** Численный метод расчета нестационарных движений идеальной несжимаемой жидкости со свободными поверхностями // ДАН СССР. — 1975. — Т. 221, № 3. — С. 559–562.
2. **Воинов О.В., Воинов В.В.** О схеме захлопывания кавитационного пузырька около стенки и образования кумулятивной струи // ДАН СССР. — 1976. — Т. 227, № 1. — С. 63–66.
3. **Воинов О.В.** Расчет параметров скоростной струи, образующейся при захлопывании пузыря // ПМТФ. — 1979. — № 3. — С. 94–98.
4. **Blake J.R., Taib B.B., Doherty G.** Transient cavities near boundaries // J. Fluid Mech. — 1986. — V. 170. — P. 479–497.
5. **Lee M., Klaseboer E., Khoo B.C.** On the boundary integral method for the rebounding bubble // J. Fluid Mech. — 2007. — V. 570. — P. 407–429.
6. **Leppinen D.M., Wang Q.X., Blake J.R.** Pulsating Bubbles Near Boundaries // Bubble Dynamics and Shock Waves Science and Technology Reference Library. — 2013. — V. 8. — P. 33–65.
7. **Аганин А.А., Ильгамов М.А., Косолапова Л.А., Малахов В.Г.** Схлопывание кавитационного пузырька в жидкости вблизи твердой стенки // Вестник Башкирского университета. — 2013. — Т. 18, Вып. 1. — С. 15–21.
8. **Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.** Методы граничных элементов. — М.: Мир, 1987. — 524 с.
9. **Best J.P., Kucera A.** A numerical investigation of non-spherical rebounding bubbles // J. Fluid Mech. — 1992. — V. 245. — P. 137–154.

## REFERENCES

1. **Voinov O.V., Voinov V.V.** Numerical method of calculating nonstationary motions of an ideal incompressible liquid with free surfaces // Soviet Physics. Doklady. — 1975. — V. 20. — P. 179–182.
2. **Voinov O.V., Voinov V.V.** On the scheme of a collapsing cavitation bubble near the wall and the formation of a cumulative jet // Soviet Physics. Doklady. — 1976. — V. 21. — P. 133–136.
3. **Voinov O.V.** Design of the parameters of high-velocity jets arisen at the collapse of a bubble [Расчет параметров скоростной струи, образующейся при захлопывании пузыря] // PMTF. — 1979. — № 3. — P. 94–98. (in Russian)

4. **Blake J.R., Taib B.B., Doherty G.** Transient cavities near boundaries // J. Fluid Mech. — 1986. — V. 170. — P. 479–497.
5. **Lee M., Klaseboer E., Khoo B.C.** On the boundary integral method for the rebounding bubble // J. Fluid Mech. — 2007. — V. 570. — P. 407–429.
6. **Leppinen D.M., Wang Q.X., Blake J.R.** Pulsating Bubbles Near Boundaries // Bubble Dynamics and Shock Waves Science and Technology Reference Library. — 2013. — V. 8. — P. 33–65.
7. **Aganin A.A., Il'gamov M.A., Kosolapova L.A., Malakhov V.G.** Collapse of a cavitation bubble in a liquid near a rigid wall [Skhlopyvanie kavitatsionnogo puzyrka v zhidkosti vblizi tverдой stenki] // Vestnik Bashkirskogo universiteta. — 2013. — V. 18, № 1. — P. 15–21. (in Russian)
8. **Brebbia C.A., Telles J.C.F., Wrobel L.C.** Boundary Element Techniques. Theory and applications in engineering. — Springer-Verlag, 1984. — 464pp.
9. **Best J.P., Kucera A.** A numerical investigation of non-spherical rebounding bubbles // J. Fluid Mech. — 1992. — V. 245. — P. 137–154.